

und Druckgradienten entstehen, die dann Massenströmungen im Plasma antreiben. Diese tragen zum Energietransport bei, und andererseits beeinflussen die damit verbundenen  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ -EMKs die Verteilung der elektrischen Felder und damit aller übrigen Parameter im Bogen.

So führt z. B. eine radiale Stromdichte  $j_r$  zu einer Rotation der Plasmasäule und diese wiederum zu einer Beschränkung von axialer elektrischer Feldstärke und Stromdichte auf die durch die Kathode bestimmte magnetische Flußröhre<sup>1</sup>. Diese Rotation bedingt auch das Auftreten von Rayleigh-Taylor-Instabilitäten, die sich evtl. auf den radialen Wärimestrom und somit auf die Temperatur im Bogen auswirken. Auch eine radiale Strömung und die von ihr transportierte Energie kann die Ursache dafür sein, daß die dem Bogen pro Längeneinheit zugeführte Leistung im Experiment sehr viel größer ist, als es die Berechnungen von RAEDER und WIRTZ

für den Bogen ohne radiale Strömungen erwarten lassen. Zwar liegen noch keine Messungen von radialen Strömungen vor, aber es gibt plausible Gründe für ihre Existenz. Es lassen sich Verteilungen der radialen Strömungsgeschwindigkeit mit Maximalwerten von weniger als  $10^4$  cm/sec angeben, die zu einer annehmbaren Übereinstimmung der Profile von  $j_z$ ,  $E_z$  und  $T$  mit den Messungen führen.

Für Anregung und Förderung dieser Arbeit danke ich Herrn Prof. Dr. R. WIENECKE, Frau S. WIRTZ und Herrn J. RAEDER bin ich für gute Zusammenarbeit und viele anregende Diskussionen besonders verpflichtet. Auch den Herren H. FIRMHOFER (Bau der Spulenstationen), A. ESCHLWECH und P. VOIGT (Aufbau des Experiments) möchte ich herzlich danken. — Diese Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

## Die Verlagerung wandstabilisierter Lichtbögen durch Krümmung\*

NORBERT NATHRATH

Elektrophysikalisches Institut der Technischen Universität München

(Z. Naturforsch. 25 a, 1609—1617 [1970]; eingegangen am 5. Juni 1970)

*The Displacement of Wallstabilized Electric Arcs by Curvature*

If an electric arc is forced to burn in a curved line by a toroidal container its position is displaced in direction to the center of curvature due to the inhomogeneous ohmic heating and of the cooling by conduction. The self magnetic-field pushes the arc outwards. Corresponding measurements in Argon at atmospheric pressure with currents from 0.5 to 20 A yield the excentric positions depending on current and curvature. The measured functions compare favourably with theory, but only if the deviation from LTE in the calculation of electric conductivity is taken into account.

### 1. Einleitung

Der gerade, wandstabilisierte Lichtbogen wurde in einer Reihe von Arbeiten<sup>1–3</sup> experimentell und theoretisch untersucht. Es gelang bei bekannten Materialfunktionen des Bogengases aus der Energiebilanz das Strom-Spannungsverhalten und die Temperaturverteilung des Bogens in guter Übereinstimmung mit gemessenen Werten zu berechnen.

Grundsätzlich bedingt die Zylindersymmetrie eines geraden Bogengefäßes entsprechende Symme-

trien der Temperaturverteilung und damit auch der Energiestromverhältnisse des Bogens, solange keine Störung von außen vorliegt. Daher brennt der zylindersymmetrische Bogen zentral in der Gefäßachse.

Äußere auf das Bogenplasma wirkende Kräfte oder von außen aufgeprägte unsymmetrische Energiestromverhältnisse können zu unsymmetrischen Temperaturverteilungen führen, die als exzentrische Bogenlagen sichtbar werden.

So hat RAEDER<sup>4</sup> am zylindrischen Bogen die Auswirkung einseitiger Wandheizung und eines über

<sup>1</sup> H. MAECKER, Z. Phys. 157, 1 [1959].

<sup>2</sup> H. MAECKER, Z. Phys. 158, 392 [1960].

<sup>3</sup> G. SCHMITZ, Z. Naturforsch. 10 a, 495 [1955].

<sup>4</sup> J. RAEDER, Z. Naturforsch. 23 a, 424 [1968].

Sonderdruckanforderungen an Prof. Dr. H. MAECKER, Elektrophysikalisches Institut der Technischen Universität München, D-8000 München 2, Arcisstraße 21.  
\* Auszug aus der Dissertation, die der Fakultät für Elektrotechnik und Maschinewesen der Technischen Hochschule München zur Erlangung des Doktorgrades eingereicht wurde.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

den Bogenquerschnitt unsymmetrischen Verlaufs der elektrischen und thermischen Leitfähigkeit des Gases auf die Bogenlage untersucht.

Die vorliegende Arbeit betrachtet die Abhängigkeit der Bogenexzentrizität von der Krümmung des Entladungsgefäßes. Als Ursachen für eine Exzentrizität kommen dabei mehrere krümmungsbedingte Unsymmetrien in Betracht, die im folgenden näher erläutert werden:

1. eine über den Bogenquerschnitt unsymmetrische elektrische Energiezufuhr; da die den Strom treibende elektrische Feldstärke auf den Krümmungsmittelpunkt hin anwächst, steigt quadratisch mit ihr die elektrische Aufheizung des Bogengases;
2. eine Unsymmetrie in den lokalen Änderungen der Wärmestromdichte; diese Unsymmetrie ist eine Folge der Vergrößerung bzw. Verkleinerung der Flächen, die der Wärmestrom auf seinem Wege zur Außen- bzw. Innenwand des Bogengefäßes durchsetzt;

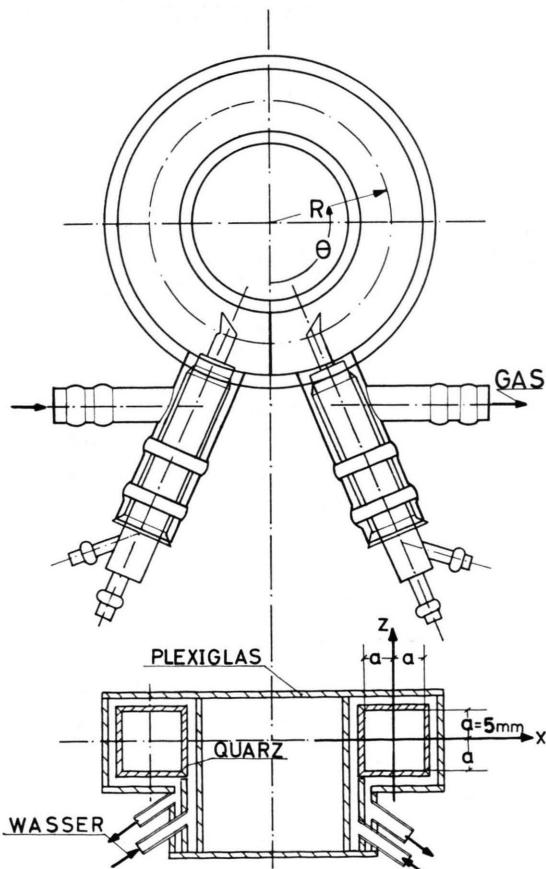


Abb. 1. Torusgefäß in Aufsicht und Schnitt.

3. eine Unsymmetrie der eigenmagnetischen Kräfte des gekrümmten Bogens, aus der eine nach außen weisende Lorentz-Kraft resultiert.

Die unsymmetrischen Energiestromverhältnisse (Punkt 1 und 2) verschieben das Temperaturmaximum von der Gefäßachse nach innen; dagegen treibt die von der Lorentz-Kraft (Punkt 3) erzeugte Gasströmung den Bogen nach außen.

In Abhängigkeit von Krümmung und Stromstärke gemessene Bogenlagen werden in der Arbeit den berechneten Werten gegenübergestellt. Befriedigende Übereinstimmung zwischen beiden lässt sich erst nach Berücksichtigung der Nichtgleichgewichtseffekte in der Rechnung erreichen.

## 2. Experimentelle Anordnung und Meßergebnisse

Der gekrümmte Bogen wird in einem wassergekühlten Quarz-Torus mit quadratischem Querschnitt von  $2a = 1\text{ cm}$  Seitenlänge betrieben. Abb. 1 zeigt den Aufbau des Entladungsgefäßes. Insgesamt werden fünf Gefäße mit verschiedenen Krümmungsradien  $R$  verwendet, wobei  $R$  in Stufen zwischen  $\infty$  (gerader Bogen) und  $9\text{ mm}$  geändert wird; daher nimmt der dimensionslose Krümmungsparameter  $k = a/R$  Werte zwischen 0 und 0,56 an. Der Bogen brennt in Argon unter Atmosphärendruck bei Stromstärken zwischen 0,5 und 20 A (Abb. 2).

Die Meßtechnik zur Bestimmung von Strom, Spannung und Bogenlage ist relativ einfach: Strom und Spannung können über einen Meßwiderstand bzw. direkt gemessen werden. Als Ort des Bogens wurde der Ort größter Strahlungsdichte, also das Temperaturmaximum angenommen. Zu dessen Bestimmung wird der Bogen photographiert, und es wird mit Photometer und Schreiber die Schwärzungskurve über die Gefäßbreite geschrieben. Aus ihr kann der Ort des Temperaturmaximums, also die Bogenlage, abgelesen werden.

Gemessen sind jeweils für alle Krümmungen  $k$

1. die Brennspannung  $U_B$  des stationär brennenden Bogens als Funktion der Stromstärke.

Die Feldstärke  $E_0$  in der Gefäßachse folgt bei bekannten, am geraden Bogen gemessenen Elektrodenfällen als Quotient aus Säulenspannung und Länge der Gefäßachse (Abb. 3). Für zunehmende Krümmung  $k$  sinken die Feldstärkewerte in der Gefäßachse; die zugehörigen Säulenfeldstärken am Ort des Bogens sind dagegen höher, da sich der Bogen mit zunehmender Krümmung immer mehr zur Innenwand verlagert, also kürzer wird.

2. die Bogenlage in Abhängigkeit von der Stromstärke.

Für wachsende Krümmung  $k$  beobachtet man zunehmende Bogenverschiebungen zur Innenwand (Abb. 4). Die Exzentrizität  $X_e$  ist definiert als Verschiebung aus der Gefäßachse, normiert auf die halbe Gefäßbreite  $a$ .

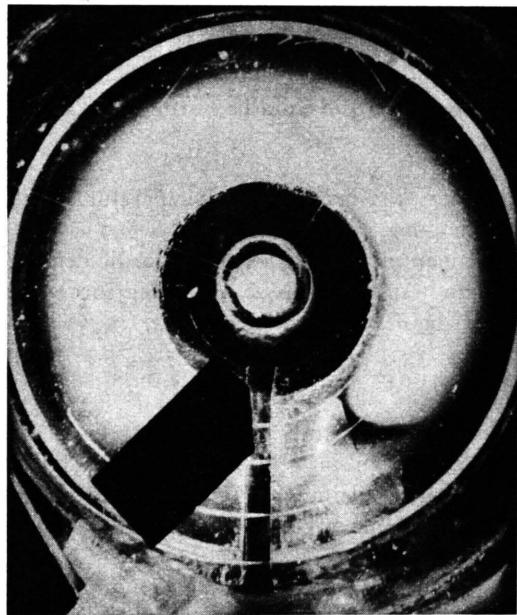


Abb. 2. Torusbogen bei 1 A bzw. 15 A.

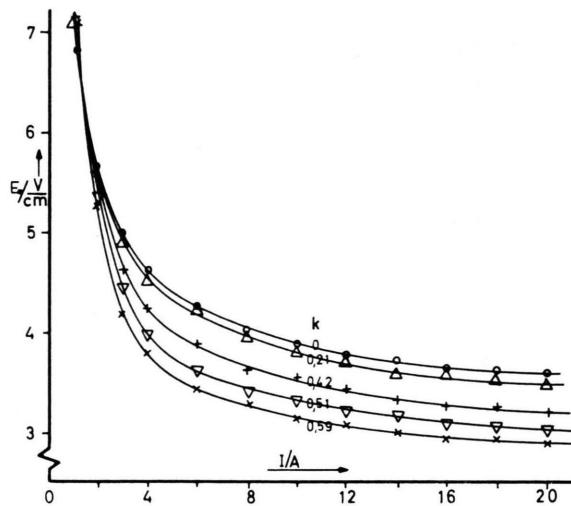
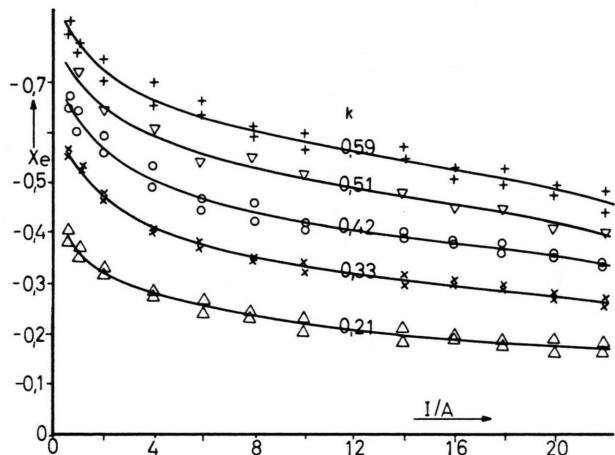
Abb. 3. Gemessene Charakteristiken des geraden Bogens und der Torusbögen mit der normierten Krümmung  $k=a/R$  als Parameter.

Abb. 4. Gemessene Exzentrizitäten in Abhängigkeit von der Stromstärke mit der normierten Gefäßkrümmung als Parameter.

### 3. Theoretischer Teil

#### 3.1. Allgemeine Gleichungen

Die Berechnung geht aus von der Energiebilanz des stationären Bogens, deren Lösung, das Temperaturfeld, die Strahlungsverteilung und damit die Bogenlage festlegt. Der kleine Beitrag der Strahlung zum Energietransport kann hier vernachlässigt werden; daher lautet die Energiegleichung:

$$-\operatorname{div} \mathbf{W} - \varrho c_p \mathbf{V} \cdot \operatorname{grad} T + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1)$$

(mit  $\mathbf{W} = -\alpha \operatorname{grad} T$ ,  $\mathbf{W}$  = Wärmestromdichte,  $\alpha =$

3. die Bogenverschiebung durch ein von außen aufgeprägtes, homogenes Quermagnetfeld  $B_z$  ( $B_z \leq 6$  G, Abb. 5).

Die Änderung der schon krümmungsbedingt exzentrischen Bogenlagen durch  $B_z$  ist mit  $\Delta X_e$  bezeichnet. Die Bogenbeweglichkeit ist am größten für kleine Krümmungen (fast zentrische Lagen) und niedrige Ströme.

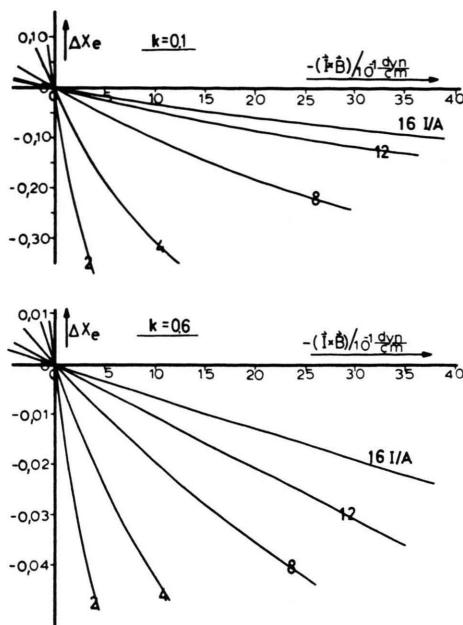


Abb. 5. Gemessene Bogenverschiebungen in Abhängigkeit von einem äußerem Magnetfeld für zwei Krümmungen bei verschiedenen Stromstärken.

Wärmeleitfähigkeit,  $\varrho$  = Massendichte,  $c_p$  = spezifische Wärme,  $\mathbf{V}$  = Strömungsgeschwindigkeit des Gases,  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$  = elektrische Leistungsdichte).

Die unbekannte Strömungsgeschwindigkeit lässt sich bei bekannten Kräften und Randbedingungen grundsätzlich aus den Navier-Stokes-Gleichungen und der Kontinuitätsgleichung berechnen, wobei die Stromdichte  $\mathbf{j}$  und die Induktion  $\mathbf{B}$  in Gl. (1) über das einfache Ohmsche Gesetz und die Maxwell-Gleichungen zu bestimmen sind. Die simultane Behandlung von Energie- und Strömungsgleichung, wie sie zur exakten Lösung des Problems nötig wäre, kann in der Torusgeometrie nur sehr schwer durchgeführt werden.

### 3.2. Näherungsweise Behandlung des Strömungseinflusses

Man gelangt zu einer wesentlich einfacheren Aufgabe, wenn man den Einfluß der Strömung getrennt betrachtet, d. h. die Energiebilanz ohne Strömungsglied löst und dann den Strömungseinfluß auch aus den Meßergebnissen eliminiert. Zu diesem Zweck wird an die Berechnung der Temperaturverteilung anschließend die Strom- und Magnetfeldverteilung und daraus die auf ein Bogensegment wirkende Lorentz-Kraft berechnet. Dieser Kraft kann über

den gemessenen Zusammenhang zwischen Bogenverschiebung und äußerem Magnetfeld eine bestimmte Lageänderung zugeordnet werden. Sie wird zu den gemessenen Exzentrizitätswerten hinzugefügt, da ja die eigenmagnetische Strömung den beiden anderen Effekten entgegenwirkt und die Exzentrizität verkleinert.

Das Verfahren hat nur Näherungscharakter, weil bei der Berechnung der integralen, auf ein Bogensegment wirkenden Lorentz-Kraft über die lokalen Änderungen des Kraftvektors gemittelt wird. Dadurch bleibt die Wirkung von Wirbelströmungen im Integrationsgebiet unberücksichtigt. Diese Vernachlässigung führt nur zu kleinen Fehlern, da der Einfluß der gesamten von der Lorentz-Kraft bewegten Gasströmung auf die Bogenlage kleiner ist als der der beiden anderen Effekte.

### 3.3. Energiegleichung für Torusgeometrie

Somit ist die wesentliche Gleichung, die im weiteren behandelt wird, die Energiegleichung (1) ohne Strömungsglied. Sie erhält nach Einführen des Wärmestrompotentials  $S$  durch die Definition  $\mathbf{x} \cdot \operatorname{grad} T = \operatorname{grad} S$  die einfache Form

$$\nabla^2 S + \sigma E^2 = 0. \quad (2)$$

Wegen der konstanten Wandtemperatur gilt die Randbedingung  $S_w = 0,05 \text{ W/cm}$ .

Führt man ein geeignetes Ringkoordinatensystem  $x, z, \Theta$  ein (Abb. 1), dessen Ursprung in der Seele des Torus bei  $R$  liegt, so lautet Gl. (2)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{1}{R+x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial \Theta^2} \frac{1}{(R+x)^2} + \sigma E^2 = 0. \quad (3)$$

Für den Idealfall eines vollständigen Torus fließt kein Wärmestrom in  $\Theta$ -Richtung. Daher fällt die entsprechende Ableitung  $\partial^2 S / \partial \Theta^2$  fort, und man kann die Rechnung zweidimensional in der  $x$ - $z$ -Ebene durchführen.

Auf einer Linie  $z = \text{const}$  ist der Verlauf des Wärmestrompotentials  $S$  über den Torusquerschnitt bestimmt von Randwerten dicht bei Null und einem Maximum im Bereichsinnen. Daher wechselt die erste Ableitung  $S_x$  bei Durchgang durch das Maximum ihr Vorzeichen. Zu dem symmetrischen Glied  $\partial^2 S / \partial x^2$  tritt also hier ein unsymmetrischer, krümmungsabhängiger Anteil  $S_x / (R+x)$  hinzu.

Leitet man den Ausdruck für  $\operatorname{div} \operatorname{grad} S$  in Ringkoordinaten aus der Gaußschen Definition der Divergenz her, so erkennt man, daß der erste Anteil

der Quellstärke des Wärmestroms in  $x$ -Richtung  $\partial^2 S / \partial x^2$  wie beim geraden Bogen der Änderung des Gradienten von  $S$  in  $x$ -Richtung entspricht. Der zweite neu hinzutretende Anteil  $S_x/(R+x)$  beschreibt bei festgehaltenem Gradienten  $S_x$  die Auswirkung der Flächenänderung bei Fortschreiten in  $x$ -Richtung. Wegen des beschriebenen unsymmetrischen Verlaufs von  $S_x$  trägt dieser Anteil wesentlich zur unsymmetrischen Temperaturverteilung im Torsusbogen bei.

Für die elektrische Feldstärke ergibt sich unter der Annahme konzentrischer, kreisförmiger Stromfäden die Ortsabhängigkeit

$$E = E_0 / (1 + x/R) \quad \text{mit} \quad E_0 = (U_B - U_F) / (2\pi - \Theta_e) R. \quad (4)$$

( $E_0$  = Feldstärke in der Gefäßachse,  $U_B$  = Brennspannung,  $U_F$  = Summe der Elektrodenfälle,  $\Theta_e$  = Elektrodenöffnungswinkel).

Dieser auf den Krümmungsmittelpunkt hin hyperbolisch ansteigende Verlauf geht quadratisch in die Energiegleichung (3) ein. Er bewirkt daher eine vermehrt unsymmetrische, innen stärkere Aufheizung des Gases.

Zur Rechnung erweist es sich als praktisch, auf die halbe Gefäßbreite  $a$  normierte Größen einzuführen: einen Krümmungsparameter  $k = a/R$ , dimensionslose Koordinaten  $X = x/a$ ;  $Z = z/a$  und eine Spannung  $E_0^* = E_0 a$ ;

Damit erhält die Energiegleichung (3) die endgültige Form:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} + \frac{1}{1+kX} \frac{\partial S}{\partial X} + \frac{\partial^2 S}{\partial Z^2} + \frac{\sigma E_0^{*2}}{(1+kX)^2} = 0. \quad (5)$$

Die Größe  $a$  tritt nicht mehr auf, es gilt also das Ähnlichkeitsgesetz des geraden zylindrischen Bogens konstanter Leistung:  $E \approx 1/a$  ( $a$  = Gefäßradius), mit der Zusatzbedingung  $k = a/R = \text{const.}$

In Gl. (5) ist nach Eliminierung von  $z$  als einzige unbekannte Materialfunktion  $\sigma(S)$  geblieben.

### 3.4. Die elektrische Leitfähigkeit im Argonbogen

Über  $\sigma$  wurde zunächst die stark vereinfachende Annahme  $\sigma = A S$  ( $A = \text{const.}$ ) getroffen, dann wird Gl. (5) relativ einfach lösbar. Die berechneten Ex-

zentritäten werden in diesem Fall stromunabhängig, denn Gl. (5) stellt eine Eigenwertgleichung für die Feldstärke dar. Auf die Rechnung dieses Falles und die Ergebnisse kann hier nicht näher eingegangen werden, die Stromunabhängigkeit der berechneten Werte steht jedenfalls in krassem Widerspruch zu den Messungen.

Experimentelle  $\sigma$ -Werte von RAEDER<sup>4</sup>, die aus Messungen am geraden Argonbogen gewonnen sind, führen auf eine etwas bessere Übereinstimmung zwischen gemessenen und berechneten Exzentritäten als die Rechnung mit  $\sigma = A S$ , jedoch zeigen die Werte ganz im Gegensatz zu den Messungen (Abb. 4) auch nur eine äußerst geringe Stromabhängigkeit. Einen Ausweg aus dieser Diskrepanz bietet die Berücksichtigung der Tatsache, daß die Abweichungen vom thermischen Gleichgewicht hier eine bedeutende Rolle spielen. Diese sind aber in den in der Literatur<sup>5</sup> angegebenen  $\sigma$ -Werten nicht enthalten.

Eine Abschätzformel für das lokale thermische Gleichgewicht nach MAECKER<sup>6</sup> ergibt mehrfach so hohe Elektronen- wie Gastemperaturen, wobei das Temperaturverhältnis unter anderem auch von der Feldstärke  $E$  abhängt. Gerade diese Abhängigkeit wirkt stark auf die Bogenlage, weil die unsymmetrische Feldstärke den Verlauf der Elektronentemperatur  $T_e$  über den Bogenquerschnitt gegenüber dem der Gastemperatur  $T_g$  verstärkt unsymmetrisch modifiziert. Diese vermehrte Unsymmetrie pflanzt sich über die stark  $T_e$ -abhängige Elektronendichte, über die elektrische Leitfähigkeit und die Energiezufuhr auf die Bogenlage fort. Somit tritt in der Energiegleichung die Inhomogenität der Feldstärke  $E$  nicht nur explizit, sondern auch implizit in der elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma(S, E)$  auf.

Eine von BEHRINGER, KOLLMAR und MENTEL<sup>7</sup> angegebene Formel (6) zur Berechnung der Elektronentemperatur als Funktion von Gastemperatur und Feldstärke im Falle schwachen Nichtgleichgewichts erweist sich hier als unzureichend, weil zur Energieübertragung von Elektronen auf Atome nur elastische Stöße berücksichtigt sind. Die Formel lautet:

$$T_e/T_g = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left[ 1 + \frac{3\pi}{32} \varrho_\sigma \left( \frac{eE}{P_g} \right)^2 \frac{1}{m_e \left( \bar{\sigma}_{eo} + \frac{n_e}{n_0} \bar{Q}_{ei} \right)^2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (6)$$

( $\varrho_\sigma$  Korrekturfaktor,  $P_g$  Gasdruck,  $m_e$  Elektronenmasse,  $m_0$  Atommasse,  $\bar{Q}_{eo}$  gemittelter Stoßquerschnitt Elektron – Atom,  $\bar{Q}_{ei}$  Coulomb-Querschnitt).

<sup>5</sup> R. DEVOTO, Phys. Fluids **10**, 10 [1967].

<sup>6</sup> H. MAECKER, Handbuch d. Phys. XXII.

<sup>7</sup> K. BEHRINGER, W. KOLLMAR u. J. MENTEL, Z. Phys. **215**, 127 [1968].

Daher wird die Summe der Querschnitte im Nenner der Formel (6) um einen weiteren vermehrt, der näherungsweise den Transport von Anregungsenergie von Elektronen auf Atome berücksichtigt.

Die erweiterte Summe lautet dann

$$\left( Q_{eo}^- + Q_{ea}^- + \frac{n_e}{n_0} Q_{ei}^- \right) \left( Q_{eo}^- + \frac{n_e}{n_0} Q_{ei}^- \right) \frac{m_e}{m_0}. \quad (7)$$

Der neue Querschnitt  $Q_{ea}^-$  wird so dimensioniert, daß eine mit der über die Langevin-Formel bestimmten Leitfähigkeit  $\sigma(S, E)$  berechnete Charakteristik des geraden Bogens mit der entsprechenden gemessenen übereinstimmt. Für die Berechnung der Elektronendichten kann nach experimentellen Untersuchungen von JANČA<sup>8</sup> an einer vergleichbaren Argonentladung auch bei thermischem Nichtgleichgewicht die Saha-Gleichung verwendet werden. Die resultierende Leitfähigkeit ist in Abb. 6 wiedergegeben.

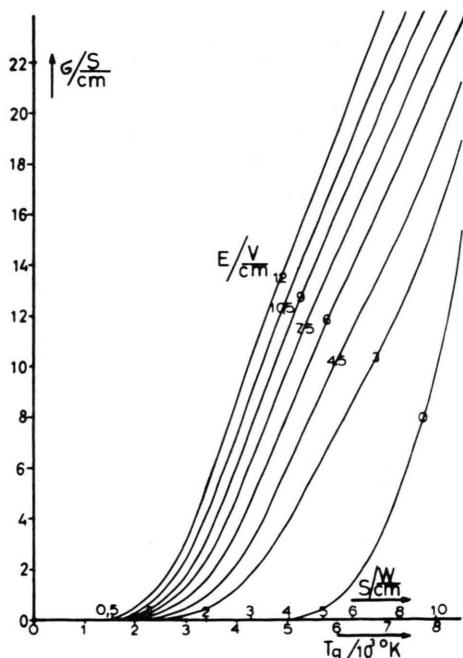


Abb. 6. Für thermisches Nichtgleichgewicht berechnete elektrische Leitfähigkeit  $\sigma(S, E)$  von Argon.

Zur Wärmeleitung tragen in dem Temperaturbereich unter  $8000^\circ\text{K}$  praktisch nur die Atome bei, daher kann die Materialfunktion  $\alpha(T_g)$  der Literatur<sup>9</sup> entnommen werden.

<sup>8</sup> J. JANČA, Chechoslovak. J. Phys. **17**, 769 [1967].

<sup>9</sup> H. EMMONS, Phys. Fluids **10**, 6 [1967].

### 3.5. Lösung der Energiegleichung

Die Lösung der vollständigen nichtlinearen, partiellen, elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung erfolgt rein numerisch in einem iterativen Verfahren auf einer elektronischen Rechenanlage.

Es wird eine beliebige Anfangsverteilung der Lösungswerte  $S^{(0)}$  im Bereich angenommen und in Schritten auf die endgültige, die Differentialgleichung befriedigende Lösung hin verbessert. Das Kontinuum der Lösungswerte im Bereich wird dabei durch eine Anzahl  $n$  diskreter Werte an einzelnen Bereichspunkten ersetzt. Die Differentialgleichung verknüpft an jedem Punkt miteinander den Funktionswert, Ableitungen der Funktion und ein vom Funktionswert nichtlinear abhängiges Glied. Ersetzt man für einen beliebigen Punkt  $t$  die Ableitungen näherungsweise durch Differenzenquotienten, wobei sich im einfachsten Fall die Differenzen nur auf die unmittelbaren Nachbarpunkte erstrecken, so erhält man eine Beziehung zwischen je fünf Punkten und kann daher den Funktionswert des Punktes  $t$  aus den Werten der vier Nachbarpunkte berechnen. Entsprechend der gewählten Punktzahl  $n$  erhält man ein Gleichungssystem mit  $n$  Gleichungen zu je fünf Unbekannten, in denen auch noch der in  $S$  nichtlineare Ausdruck mit  $\sigma$  steht.

#### 3.5.1. Linearisierung der Leitfähigkeit

Im Hinblick auf eine iterative Behandlung bietet sich als einfachste Linearisierung an,  $\sigma_t$  am Punkte  $t$  in der Iterationsstufe  $k$ , also  $\sigma_t^{(k)}$  durch seinen jeweils letzten Wert in der Stufe  $k-1$  zu ersetzen:

$$\sigma_t^{(k)} = \sigma_t^{(k-1)}. \quad (8)$$

Vorausgesetzt, daß die  $\sigma$ -Funktion im ganzen Bereich streng konvex oder konkav ist, ließe sich nach KALABA<sup>10</sup> statt dieser (Piccardschen) Näherung eine schneller konvergierende verwenden, die die Tangente der  $\sigma$ -Funktion  $\sigma_s'$  an die neue Lösung mitbenutzt:

$$\sigma_t^{(k)} = \sigma_t^{(k-1)} + \sigma_{s,t}^{(k-1)} (S_t^{(k)} - S_t^{(k-1)}). \quad (9)$$

Diese Linearisierung führt aber leider zu Schwierigkeiten bei der iterativen Lösung des Gleichungssystems.

<sup>10</sup> R. J. KALABA, Math. Mech. **8**, 519 [1959].

### 3.5.2. Iterative Behandlung des linearen Systems

Das zu lösende lineare System

$$\begin{aligned} B_{11}S_1 + B_{12}S_2 + \dots + B_{1t}S_t &= A_1, \\ \vdots & \\ B_{t1}S_1 + B_{t2}S_2 + \dots + B_{tt}S_t &= A_t, \end{aligned}$$

enthält in jeder Zeile nur fünf von Null verschiedene Matrixelemente  $B_{ij}$ . Der Lösungsbereich wird hier durch  $20 \times 20$  diskrete Punkte ersetzt; das dadurch gegebene System aus vierhundert Gleichungen kann nur mehr iterativ gelöst werden. Die dazu nötigen Bedingungen werden nach AMES<sup>11</sup> von der Matrix  $B$  nur erfüllt, wenn die einfache Linearisierung für  $\sigma$  nach (8) verwendet wird.

Von den möglichen iterativen punktweisen Lösungsmethoden (Jacobi-, Gauß-Seidel-, Überrelaxationsmethode) wird die letzte verwendet. Sie führt erfahrungsgemäß am schnellsten zum Ziel.

In der Iterationsstufe  $p$  ist der Wert von  $S$  am Punkt  $t$  durch die Gleichung:

$$S_t^{(p)} = (1 - F) S_t^{(p-1)} + \frac{F}{B_{tt}} \left\{ A_t - \sum_{i=1}^{t-1} B_{ti} S_i^{(p)} - \sum_{i=t+1}^n B_{ti} S_i^{(p-1)} \right\} \quad (10)$$

gegeben.

Sie wird mit einem Wert des Relaxationsfaktors  $F = 1,65$  ausgewertet.

Zu der angenommenen Anfangsverteilung muß noch ein Parameter festgelegt werden, der die Leistung bestimmt. Dazu könnte die Feldstärke dienen; jedoch ist die Zuordnung der Leistung zur Feldstärke bei Charakteristiken, die ein Minimum aufweisen, nicht mehr eindeutig. Daher wird als Leistungsparameter die Amplitude der  $S$ -Verteilung  $S_{\max}$  gewählt. Gleichung (10) wird für alle Punkte des Feldes nacheinander so oft durchlaufen, bis die größte Änderung eines Funktionswertes bei einem Schritt 1% des Maximalwertes unterschreitet.

Die so gewonnene  $S$ -Verteilung ist die Lösung des in  $\sigma$  linearisierten Systems. Von ihr führen weitere  $k$ -Schritte zur Lösung des nichtlinearen Problems, wobei in jeder Iterationsstufe  $k$  entsprechend Gl. (8) eine  $\sigma$ -Verteilung, berechnet aus der  $S$ -Verteilung der Stufe  $k-1$ , verwendet wird. Das Verfahren konvergiert nach einigen Schritten, obwohl

auch die Feldstärke von Schritt zu Schritt an einen dem angenommenen Leistungsparameter  $S_{\max}$  entsprechenden Wert  $E^{(k)}$  angepaßt werden muß.

Zu der so erhaltenen  $S$ -Verteilung mit der Amplitude  $S_{\max}$  läßt sich bei bekannter Feldstärke der Bogenstrom berechnen; durch Variation des Parameters  $S_{\max}$  erhält man dann eine Reihe von Punkten der Strom-Feldstärke-Charakteristik.

Den gemessenen Exzentrizitäten entsprechen die Maxima der Elektronentemperatur  $T_e$ , da die Gesamtstrahlungsdichte vorwiegend von  $T_e$  abhängt. Von den berechneten  $S$ -Verteilungen führt daher der Weg zur Bestimmung des Bogenortes über die Berechnung der zugeordneten Verteilung und des Maximums von  $T_e$ .

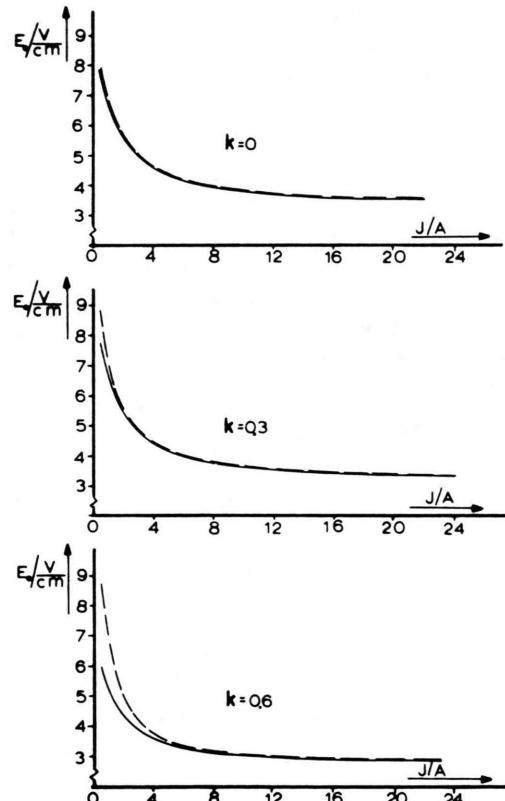


Abb. 7. Gemessene Charakteristiken (gestrichelt) und mit  $\sigma(S, E)$  berechnete (durchgezogen) für drei Krümmungen  $k$ .

### 3.6. Lösungswerte

#### 3.6.1. Charakteristiken

Die Übereinstimmung der gerechneten mit der gemessenen Charakteristik für den geraden Bogen in Abb. 7 ist erzwungen, denn sie diente als Kriterium für die Festlegung des Korrekturquerschnitts.

<sup>11</sup> W. F. AMES, Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Academic Press, New York 1965, S. 286, 370.

Daß diese Übereinstimmung für alle Krümmungen gut erhalten bleibt, ist ein Hinweis auf die richtige Dimensionierung jenes Querschnitts. Abweichungen machen sich zunehmend für hohe Säulenfeldstärken  $E > 7 \text{ V/cm}$  bemerkbar, d. h. für große Krümmungen und kleine Ströme. In dem Bereich wird der Stoßquerschnitt  $Q_{ea}^-$  unsicher, da er den Verhältnissen am geraden Bogen mit maximalen Feldstärken von  $6 - 7 \text{ V/cm}$  angepaßt ist.

### 3.6.2. Exzentrizitäten

Um die gerechneten Exzentrizitäten mit den gemessenen vergleichen zu können, sind diese – wie in Abschnit 3.2 beschrieben – noch vom Strömungseinfluß zu befreien. Dazu wird zur berechneten Temperaturverteilung die Strom- und Magnetfeldverteilung bestimmt; diese Rechnungen schließen an die numerischen an: der gesamte Stromring mit beliebiger Stromverteilung über den Querschnitt wird dabei in vierhundert konzentrische und parallele Stromringe mit quadratischem Profil zerlegt.

Deren Felder wären exakt berechenbar<sup>12</sup>, hier wird jedoch wegen der kleinen Stromflächenquerschnitte einfacheitshalber mit Fadenströmen gerechnet. Die von einem fadendünnen Stromring (Radius  $R_0$ ) erzeugte Feldstärke-Komponente ( $h_z$ ) an einem nicht auf dem Faden liegenden Aufpunkt ( $x, z$ ) ist gegeben durch:

$$h_z = \frac{I R_0}{\pi} \frac{1}{p^3} \left( (R_0 + x) K' - x \frac{t^2}{q^2} 2 B \right). \quad (11)$$

mit den üblichen Abkürzungen  $K'$  und  $B$  der vollständigen elliptischen Integrale und den Ausdrücken

$$\begin{aligned} p^2 &= z^2 + (R_0 + x)^2, & t^2 &= x^2 + z^2 - R_0^2, \\ q^2 &= z^2 + (R_0 - x)^2, & k^2 &= 4xR_0/p^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Damit läßt sich die Gesamtfeldstärke  $H_z$  an jedem Aufpunkt durch Summieren der Feldanteile  $h_z$  aller Stromfäden gewinnen. Durch Multiplikation von  $H_z$  mit der entsprechenden Stromdichte  $j_\theta$  folgt die lokale Lorentz-Kraft in  $x$ -Richtung und daraus durch Integration über ein Bogensegment die integrale auf dieses Segment wirkende Kraft. Ihr kann nach den Messungen von  $\Delta X_e(\mathbf{I} \times \mathbf{B})$  in Abb. 5 eine bestimmte Bogenverschiebung zugeordnet werden, die zu den ursprünglich gemessenen Exzentrizitäten hinzugezählt wird (Abb. 8).

Die berechneten Exzentrizitäten (Abb. 9) stimmen recht gut mit den Messungen überein. Entspre-

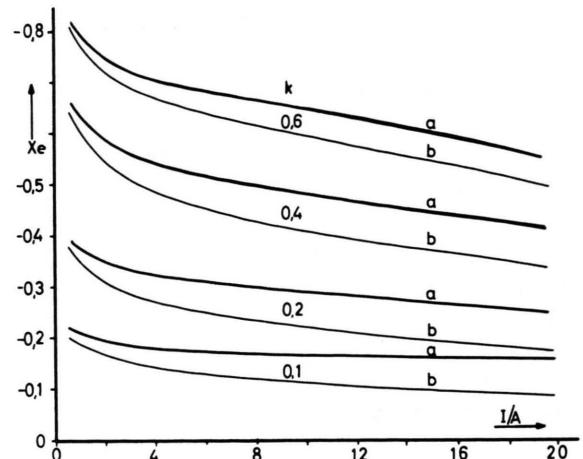


Abb. 8. a) Korrigierte Exzentrizitätsmeßkurven (nach Kompen-sation der integralen Lorentz-Kraft); b) unkorrigierte Werte.

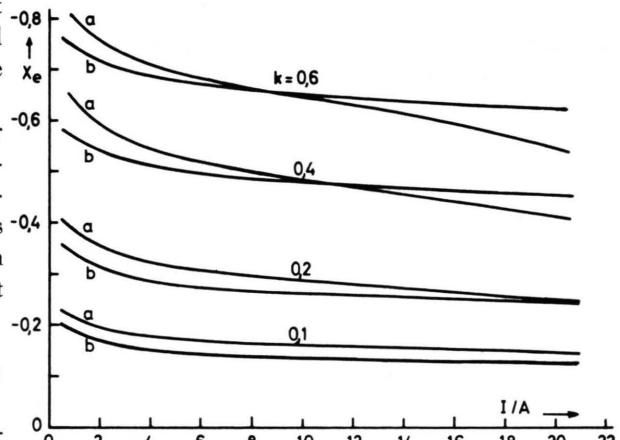


Abb. 9. a) Korrigierte gemessene und b) mit  $\sigma(S, E)$  gerechnete Exzentrizitäten als Funktion des Stroms für verschiedene Krümmungen  $k$ .

chend den in der Rechnung verwandten Näherungen bei der Berücksichtigung des Strömungseinflusses und der Behandlung des thermischen Nichtgleichgewichtes treten besonders in zwei Bereichen zwischen den gerechneten und gemessenen Kurven Abweichungen im Verlauf auf. Dies gilt für große eigenmagnetische Kräfte (große Ströme bei starker Krümmung) und hohe Feldstärken (kleine Ströme bei starker Krümmung). Bei großen Lorentz-Kräften macht sich die Vernachlässigung der Wirbelkomponenten in einer zu geringen Vergrößerung der ursprünglich gemessenen Exzentrizitäten bemerkbar; für hohe Säulenfeldstärken, die über die höchsten des geraden Bogens hinausgehen, führt die mit dem Querschnitt  $Q_{ea}^-$  berechnete Leitfähigkeit auf zu

<sup>12</sup> GR. BROWN u. L. FLAX, J. Appl. Phys. 35 (No. 6) [1964].

kleine Exzentrizitäten. Außerdem tritt, bei kleinen Krümmungen gut sichtbar, eine Parallelverschiebung zwischen Meß- und Rechenkurven auf, die jedoch innerhalb der Fehlergrenze der Messungen liegt.

Exakte Übereinstimmung im Verlauf findet man daher erwartungsgemäß für kleine Krümmungen. Die beste Übereinstimmung der Absolutwerte ist bei ca. 4 A festzustellen, dort liegen die Differenzen zwischen 12% und 3%.

#### 4. Zusammenfassung

Die exzentrische Lage des gekrümmten, wandstabilisierten Bogens wird hervorgerufen durch das Zusammenwirken dreier Unsymmetrien: der des elektrischen Feldes, der der Wärmeleitung und der des Eigenmagnetfeldes. Den größten Anteil an der Verlagerung des Bogens nach innen hat die Unsymmetrie der elektrischen Feldstärke. In der gleichen

Richtung, aber schwächer, wirkt die Wärmeleitungsunsymmetrie. Die Verschiebung nach innen infolge dieser zwei Unsymmetrien wird teilweise durch die eigenmagnetische Strömung kompensiert, die den Bogen etwas nach außen mitnimmt. Alle drei Effekte nehmen mit der Krümmung zu. Unmittelbar stromabhängig ist nur der dritte; die zwei ersten werden es mittelbar, wenn sich mit dem Strom gemäß der Charakteristik die elektrische Feldstärke und damit die Leitfähigkeit ändert. Wegen des thermischen Nichtgleichgewichts beim Argon-Niederstrombogen wird die Leitfähigkeit von der Feldstärke und damit vom Strom abhängig. Daher ist hier das Nichtgleichgewicht Ursache für die starke Zunahme der Exzentrizitäten mit abnehmendem Strom.

Der Verfasser dankt Herrn Prof. Dr. H. MAECKER herzlich für die Themenstellung und Förderung der Arbeit und der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Gewährung einer Sachbeihilfe.

## Quantitative Ausmessung des Brom-Affinitätskontinuums und Bestimmung der Detachment- und Attachment-Querschnitte

H. FRANK, M. NEIGER und H.-P. POPP \*

Elektrophysikalisches Institut der Technischen Universität München

(Z. Naturforsch. **25 a**, 1617—1626 [1970]; eingegangen am 17. September 1970)

A wall stabilized low-current cylindric arc was used to produce the radiation of the negative Bromine-ions. The radiation consists of an affinity-continuum with a long-wave threshold of 3682 Å, yielding an electron affinity for Bromine of 3.366 eV, and of an intense electron-atom Bremsstrahlung in the visible. Intensity measurements of the continua allow the determination of the photo-detachment- and attachment-cross-sections of Bromine and also the determination of the mean elastic cross-section of electrons against Bromine atoms.

Die Absolutmessung der kontinuierlichen Strahlung, wie sie bei der Anlagerung freier Elektronen an neutrale Atome auftritt, erlaubt zusammen mit einer Plasmatemperaturmessung die Bestimmung des Detachment- und Attachment-Querschnittes. Zur Erzeugung des Affinitätskontinuums und zu dessen quantitativer Messung eignet sich besonders der zylindersymmetrische, wandstabilisierte Niederstromlichtbogen<sup>1-3</sup>. Es sind jetzt aber auch quantitative Messungen mit Hilfe des Stoßwellenrohres von ROTHE<sup>4</sup> bekannt geworden.

Für grundlegende Untersuchungen der Strahlung negativer Ionen eignen sich die Halogene wegen ihrer großen Elektronenaffinität<sup>5</sup> (3,0 bis 3,6 eV) und dem sich daraus ergebenden günstigen Spektralbereich besonders gut. So wurden bisher die Detachment-Querschnitte der Halogene Fluor<sup>2</sup> und Chlor<sup>3</sup> aus Messungen am Lichtbogen und der Halogene Chlor, Brom, Jod<sup>4</sup> aus Messungen am Stoßwellenrohr bestimmt. Die ermittelten Detachment-Querschnitte, wie sie im Lichtbogen<sup>3</sup> und im Stoßwellenrohr<sup>4</sup> gewonnen wurden, stimmen weitgehend mit-

\* OSRAM-Studiengesellschaft München.

Sonderdruckanforderungen an Prof. Dr. H. MAECKER, Elektrophysikalisches Institut der Technischen Universität München, D-8000 München 2, Arcisstraße 21.

<sup>1</sup> H.-P. POPP, Z. Naturforsch. **20 a**, 642 [1965].

<sup>2</sup> H.-P. POPP, Z. Naturforsch. **22 a**, 254 [1967].

<sup>3</sup> G. MÜCK u. H.-P. POPP, Z. Naturforsch. **23 a**, 1213 [1968].

<sup>4</sup> D. E. ROTHE, Phys. Rev. **177**, 93 [1969].

<sup>5</sup> H.-P. POPP, 8. Intern. Conf. Phenomena Ionized Gases, Springer-Verlag, Wien 1967, S. 448.